# درمانگاه ریاضی

افشین خاصّه‌خان

## دارویی برای شمارش

سلام بچه‌ها! به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. امیدوارم تا حد امکان شیوه‌نامه‌های بهداشتی را رعایت کنید و خود و خانواده‌تان را از شر این بیماری ویروسی در امان نگه دارید. مراجعه‌کنندهٔ این هفته دانش‌آموزی نهمی به نام **امیررضا حسن‌زاده** است. امیررضا با پدرش به درمانگاه آمده است. پدر امیررضا به کار صافکاری خودرو مشغول است و در کارش بسیار مهارت دارد. بعد از سلام و احوال‌پرسی با آن‌ها، امیررضا را به اتاق درمانی دعوت می‌کنم.

بعد از یک ربع تا بیست دقیقه «گفت‌وگوی سقراطی» معمول در ارتباط با موضوع‌هایی که او مطرح کرد، دو مشکل موجود در تفکر ریاضی‌اش را در ارتباط با آن موضوع‌ها حدس زدم. امیررضا قصد داشت معدل خود را برای ورود به رشتهٔ انسانی ترمیم کند.

### تشخیص

یکی از مشکلات امیررضا در مفهوم عددهای مربع کامل بود و مشکل دیگر نداشتن نظم منطقی در شمارش زیرمجموعه‌های یک مجموعه. یکی از سؤال‌هایی را که در مورد آن صحبت کردیم و از اشکال‌های عمدهٔ او بود، در اینجا با شما در میان می‌گذارم:

مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیر مجموعهٔ غیرتهی دارد که حاصل‌ضرب اعضایشان مربع کامل باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

سؤال از آزمون ورودی «دبیرستان انرژی اتمی» بود و طبیعی است برایش به نسبت سخت باشد. او عددهای مربع کامل را می‌شناخت، اما درک عمیقی از عددهای مربع کامل لازم بود. همچنین رسیدن به تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب و شمارش

آن‌ها نظمی منطقی نیاز داشت که به نظر می‌رسید امیررضا در شمارش آن‌ها از آن استفاده نمی‌کند.

## درمان

برای اینکه امیررضا متوجه مشکلش شود، گفت‌وگوی دوطرفه را آغاز کردم. او پس از سؤال و جواب‌های متوالی متوجه شد یکی از روش‌ها برای حل این سؤال آن است که ابتدا عددهای مربع کامل را بنویسد و سپس حاصل‌ضرب اعضایی از مجموعهٔ $A$ را که برابر یک عدد مربع کامل است، مشخص کند:

عددهای مربع کامل :

$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,...\}$

اشتباه اول این بود که زیرمجموعه‌های یک عضوی را شمارش نمی‌کرد. البته تقصیر زیادی هم نداشت، چون در سؤال نوشته شده بود، حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها و سپس قانع شد که زیرمجموعه‌های تک عضوی که خودشان مربع کامل باشند، جواب مسئله محسوب می‌شوند: $A_۴=\{4\}$ $A_۱=\{1\}$

حال نوبت زیرمجموعه‌های دوعضوی بود. امیررضا برای عدد مربع کامل ۴ دو زیر مجموعه نوشت: $A_۴=\{2,2\}$ $A_۳=\{1,4\}$

و با این سؤال من که: آیا مجموعهٔ $A_۴$ دو عضوی است، به خود آمد و آن را پاک کرد. او برای عدد مربع کامل ۹ با کمی مکث گفت: زیرمجموعه‌ای از $A$ وجود ندارد که با تأیید من انرژی گرفت. عدد مربع بعدی ۱۶ بود که امیررضا زیرمجموعهٔ $A_۴=\{2,8\}$ را نوشت. سپس عدد مربع ۲۵ را نیز رد کرد. برای عدد ۳۶ پس از چند آزمون و خطا زیرمجموعهٔ دوعضوی نیافت. این تکرارها تسلط او را افزایش می‌دادند و به همین خاطر عددهای مربع ۴۹، ۶۴ و ... را برای زیرمجموعه‌های دو عضوی رد کرد.

زیرمجموعه‌های سه عضوی که امیررضا برای دو عدد مربع ۳۶ و ۶۴ نوشته بود، عبارت بودند از:

$A_۵=\{2,3,6\}$ $A_۶=\{2,4,8\}$

با یادآوری اینکه یک عضو خنثا در عمل ضرب وجود دارد، پنجرهٔ جدیدی در ذهنش باز شد و متوجه شد که از زیرمجموعه‌های دو عضوی می‌تواند برای نوشتن زیرمجموعهٔ سه عضوی استفاده کند و نوشت: $A_۷=\{1,2,8\}$

جالب بود که هرقدر پیش می‌رفت، تسلطش بر موضوع بیشتر می‌شد. او از عددهای مربع ۲۵، ۴۹، ۱۲۱ و ۱۶۹ بدون آزمون و خطا گذشت و مطمئن بود که برای این عددها زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $A$ با شرایط خواسته‌شده نمی‌توان یافت. می‌خواست زیرمجموعه‌های چهار عضوی را شروع کند.

بعد از چند پرسش و پاسخ امیررضا متوجه شد که می‌تواند طور دیگری نیز به موضوع نگاه کند؛ یعنی عددهایی را انتخاب کند که پس از تجزیهٔ آن‌ها، تعداد عددهای اول تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها زوج باشد. مثلاً در ۸ سه تا ۲ وجود دارد: $8=2\times2\times2$. با انتخاب $6=2\times3$، حالا او چهار تا ۲ و یک ۳ دارد که با انتخاب ۳، تعداد عددهای اول تشکیل‌دهنده زوج می‌شود: $A_۸=\{3,6,8\}$

حال خود او متوجه شده بود که چرا برای عددهای ۲۵، ۴۹، ۱۲۱، ۱۶۹ و ... آزمون و خطا نمی‌کند؛ چون در تجزیهٔ اعضای مجموعهٔ $A$، تعداد زوج ۵ یا ۷ یا ... وجود ندارد.

حال نوبت زیرمجموعه‌های چهار عضوی بود. امیررضا دوباره از زیرمجموعه‌های سه عضوی استفاده کرد:

$A_۹=\{1,3,6,8\}$ $A_{۱۰}=\{1,2,3,6\}$ $A_{۱۱}=\{1,2,4,8\}$

بعد از کش و قوس فراوان و کمی راهنمایی، امیررضا با روش تجزیهٔ دو مجموعهٔ چهار عضوی فاقد عضو ۱ نوشت:

$A_{۱۲}=\{2,3,4,6\}$ $A_{۱۳}=\{3,4,6,8\}$

و گفت در $A_{۱۲}$ چهار تا ۲ و دو تا ۳ وجود دارد، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها یک عدد مربع کامل است.

سپس بلافاصله عدد ۱ را به هر دو مجموعهٔ آخر اضافه کرد و دو مجموعهٔ پنج عضوی نوشت:

$A_{۱۴}=\{1,2,3,4,6\}$ $A_{۱۵}=\{1,3,4,6,8\}$

امیررضا کمی تلاش کرد زیرمجموعهٔ پنج عضوی بدون عضو ۱ بنویسد، اما نتوانست. در واقع امکان نداشت، چون اعضای ۵ و ۷ به دلیل تعداد فردشان در هیچ زیرمجموعه‌ای نمی‌توانستند باشند. لذا اگر به زیرمجموعهٔ $A_{۱۲}$ عضو ۸ یا به زیرمجموعهٔ $A_{۱۳}$ عضو ۲ را اضافه کنیم، به تعداد فرد عدد ۲ خواهیم داشت که حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل نخواهد شد. با توضیح‌هایم او متوجه شد که جواب سؤال برابر با ۱۵ است. حس رضایت در چهرهٔ امیررضا مشهود بود.

## تجویز

بعد از تشخیص بیماریِ تفکر ریاضیِ امیررضا، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانیِ لازم بود:

۱. به او توصیه کردم فصل مجموعه‌ها و تجزیهٔ عددها را از کتاب‌های درسی دورهٔ اول متوسطه به دقت بخواند و تمریناتش را حل کند.

۲. بعضی از تمرین‌های مهم مجموعه‌ها و ب.م.م و ک.م.م را از کتاب درسی خود یاد بگیرد و تا حد امکان بکوشد خودش آن‌ها را حل کند و اگر نشد، حداقل روند حل آن‌ها را تحلیل و تعقیب کند.

۳. تمرین‌های مشابهی را برایش تعیین و سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان پاسخ مسئله را از کسی نپرسد.

۴. برای سؤال‌هایی که نتوانسته جواب دهد، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک مسئله بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

۵. اگر امکان داشته باشد، مسئله‌هایی را با روش‌های متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.

۶. اگر علاقه‌مند باشد، چند سؤال در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعف سؤال‌هایش آشکار شوند.

با پویش رمزینهٔ مقابل می‌توانید مطلب شمارهٔ قبل رابینید.